第二节

计算定积分的一般方法
——微积分基本定理

主要内容：

一、问题的提出

二、微积分的基本定理

三、定积分的换元积分法

四、定积分的分部积分法

一、问题的提出

积分学中要解决两个问题：

一、原函数的求解；

不定积分问题

二、定积分计算.

解决面积、体积、做功、利润等实际问题

如何计算定积分？

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

定义很复杂，直接计算很困难. 需要转换新的思路.

变速直线运动中位置函数与速度函数的联系

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$

另一方面这段路程可表示为 $s(T_2)-s(T_1)$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1)=s(t)\Big|_{T_1}^{T_2},\text{其中 } s'(t)=v(t).$$

大胆猜想 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$，

$F(x)$是被积函数$f(x)$的原函数.

巧合还是真理？

二、微积分基本定理

变限定积分概念

设$f(x)$在$[a,b]$上可积, $x\in[a,b]$,由积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

所定义的函数$\Phi(x)$称为变上限定积分.

$$\psi(a)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

同理,由积分$\psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$

所定义的函数$\psi(x)$称为变下限定积分.

变上限积分、变下限积分统称为变限积分.

借助求函数值来解决

定理 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则由变上限定积分定义的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

$\Phi(x)$是$f(x)$的原函数

在$[a,b]$上求导,且$\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$.

提示: 用导数的定义和定积分中值定理来证明.

定理 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,若$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

积分区间的可加性

牛顿–莱布尼茨公式

提示与分析: 原函数存在定理，结合原函数之间的关系.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题

注意 当$a > b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$仍成立.

牛顿–莱布尼茨公式揭示了微分（导数）与定积分这两个定义之间的内在联系，因而称为微积分基本定理.

积分中值定理

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

微分中值定理

其中$F'(x)=f(x)$

例1　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x.$

先看成不定积分问题，求出原函数.

提示与分析：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$

解　$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0$$

$$= 1.$$

三、 定积分的换元积分法

定理(定积分换元积分法)

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,函数$x=\varphi(t)$满足下列条件:

(1)$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,且$a\le\varphi(t)\le b, t\in[\alpha,\beta]$.

(2)在$[\alpha,\beta]$上有连续导数$\varphi'(t)$,

则有定积分换元公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\ .$$

提示:用复合求导法则来证明.

应用换元公式时要注意:

- 做变量代换$x=\varphi(t)$时,积分限要相应的改变.

- 找到$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数$F(t)$后,不必像换元法求不定积分那样,须将$F(t)$还原成原变量x的函数,定积分只要把新变量t的上、下限代入$F(t)$,再相减就可以了.

例2 计算 $\int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x}$.

解 原式 $= \int_{-e-1}^{-2} \frac{1}{1+x} d(1+x)$ $t = 1+x$

$$= \int_{-e}^{-1} \frac{1}{t} dt$$

$$= \ln|t| \Big|_{-e}^{-1}$$

$$= \ln 1 - \ln e$$

$$= -1.$$

如何去掉根式？

例3 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0).$

三角代换

解 令 $x = a\sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t,$

x从 0变到 a, t从0变到$\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}(2t) = 2\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \,\mathrm{d}(2t)\right]$$

$$v = 2t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

定理(定积分的分部积分法)

若u, v是$[a, b]$上具有连续导数的函数,则

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

证 由$(uv)' = u'v + uv'$, uv是$u'v + uv'$的原函数,

用牛顿–莱布尼茨公式即可证明.

例4 计算$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

解 $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi} x\,d(\sin x)$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$=0$

$$= \cos x\Big|_0^{\pi} = -2 .$$

课后作业

习题 6 (page 167)

2(2)(4)， 3(1)，4(3)(12) ，5(2)