第二节

求导数的方法——法则与公式

主要内容：

一、求导法则

二、基本初等函数的求导公式

一、求导法则

1. 函数和、差、积、商的求导法则：

如果函数$u(x)$、$v(x)$在点x处可导，则它们的和、差、积、商（分母不为零）在点x处也可导，并且

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$

此法则可推广到任意有限项的情形，即

代数和的导数等于导数的代数和.

例1 已知$y = x^3 - \sin x + \ln 2$,求y'.

解 $y' = (x^3 - \sin x + \ln 2)'$ 常数

$= (\quad)' - (\quad)' + (\quad)' = 0$

$= 3x^2 - \cos x.$

$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

(2) $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$

当$u = C$（C为常量）时，$(C v)' = C v'.$

常数因子可提到导数符号外面.

例2 已知$y = x^2 \ln x + 2\sqrt{x}\cos x + \pi$,求$y'$.

解 $y' = (x^2 \ln x + 2\sqrt{x}\cos x + \pi)'$

$$= (x^2 \ln x)' + (2\sqrt{x}\cos x)' + (\pi)' = 0$$

$$= (x^2)' \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$+ (2\sqrt{x})' \cos x + 2\sqrt{x}(\cos x)'$$

$$= 2x \ln x + x + \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\sin x.$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

当$u(x)=1$时,

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{\underbrace{(1)'v(x)}_{=0} - 1 \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}.$$

不可以为 $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

特别的, $\boxed{\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}}$

例3 已知$y=\tan x$,求y'.

$$(\tan x)'=\sec^2 x,$$
$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=$$

2. 复合函数的求导法则：

设$y=f[\varphi(x)]$是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数，并设函数$u=\varphi(x)$在点x处可导，$y=f(u)$在对应点$u=\varphi(x)$处也可导，则有复合函数的求导法则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

此式也可写为

中间变量

自变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x),\qquad y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

复合函数的求导法则可叙述为：复合函数的导数，等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.

中间变量　　中间变量　　自变量

设$y=f(u),u=\varphi(v),v=\psi(x)$,则复合函数$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的求导法则为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

例4 $y=\sin\sqrt{x}$，求y'.

解 $y=\sin u,\quad u=\sqrt{x},$

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sin u)'\cdot(\sqrt{x})'$$

$$=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$$(\sin u)'=\cos u,\quad (\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例5 $y=\ln|x|$，求y'.

分段函数

解 根据定义域，去掉绝对值符号，为分段函数，

$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

当$x>0$时， $y'=(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

当$x<0$时， $y'=(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{1}{x}$,

综上， $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

$y=y(x)$

3. 用复合函数求导法则求隐函数的导数

如果方程$F(x,y)=0$确定了y是x的函数，那么，这样的函数叫做隐函数.

即x与y的函数关系不能明显表示出来，而由方程$F(x,y)=0$确定，

例如，$x^2+xy+y^2=4$ 就是一个隐函数.

设隐函数y关于x可导，我们可以利用复合函数求导法则，求出y关于x的导数.

下面我们用例题来说明这种解法:

例8　方程$x^2 - y + \ln y = 0$确定了y是x的隐函数，求y'.

解　因为y是x的函数，所以$\ln y$是x的复合函数$\ln[y(x)]$.

$$\ln[y(x)] \Rightarrow \ln u, u = y(x)$$

于是方程两边对x求导数有

$$2x - y' + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而　$y' = \dfrac{2xy}{y-1}$.

二、基本初等函数的求导公式

1. 幂函数$x^{\alpha}$$(\alpha \in R)$的导数

取对数求导法

对等式$y = x^{\alpha}$的两边取自然对数，有

$y=y(x)$

$$\ln y = \alpha \ln x.$$

两端对x求导得 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\alpha}{x}$,

于是 $y' = \dfrac{\alpha y}{x} = \dfrac{\alpha x^{\alpha}}{x}$,

$$\therefore (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2. 指数函数$y=a^x\ (a>0,$且$a\neq 1)$的导数

使用取对数求导法，有 $\ln y = x\ln a.$

两端对x求导得 $\dfrac{y'}{y}=\ln a,$

于是 $y'=y\ln a,$

即 $(a^x)'=a^x\ln a.$

特别当$a=\mathrm{e}$时，$(\mathrm{e}^x)'=(\mathrm{e}^x).$

以e为底的指数函数的导数仍是它本身.

3. 反三角函数的导数

$y=y(x)$

设$y=\arcsin x, x\in(-1,1), y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,则

存在反函数$x=\sin y$,等式两端对x求导得:

$$1=\cos y\cdot y'.$$

由此得 $y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$,

即有 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

同理，我们有

- $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
- $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$
- $$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

例10 质量为m_0的放射性物质，经过时间t后，所剩的质量m与时间t的关系为$m = m_0 \mathrm{e}^{-kt}$(k为正数，是该物质的衰减系数)，求该物质的衰减率.

提示与分析：

衰减率

变化率

质量关于时间的导数

解　物质的衰减率就是质量m对时间 t 的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0\mathrm{e}^{-kt})=m_0\mathrm{e}^{-kt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-kt)$$

$$=-km_0\mathrm{e}^{-kt}=-km.$$

质量随时间的增加而减小.