第五章

微分的逆运算问题

——不定积分

第一节

逆向思维又一例

—— 原函数与不定积分

主要内容：

一、原函数与不定积分的概念

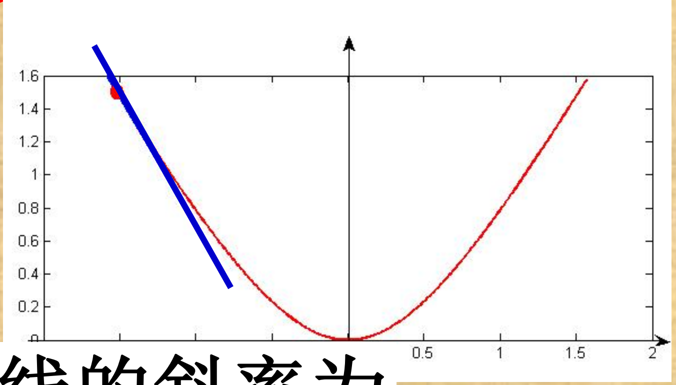
二、基本积分公式

三、不定积分的线性运算法则

一、原函数与不定积分的概念

回顾导数概念的两个现实原型

1. 切线的斜率



曲线$y = f(x)$在(x_0, y_0)切线的斜率为

$$k = \tan\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

2. 变速直线运动的瞬时速度

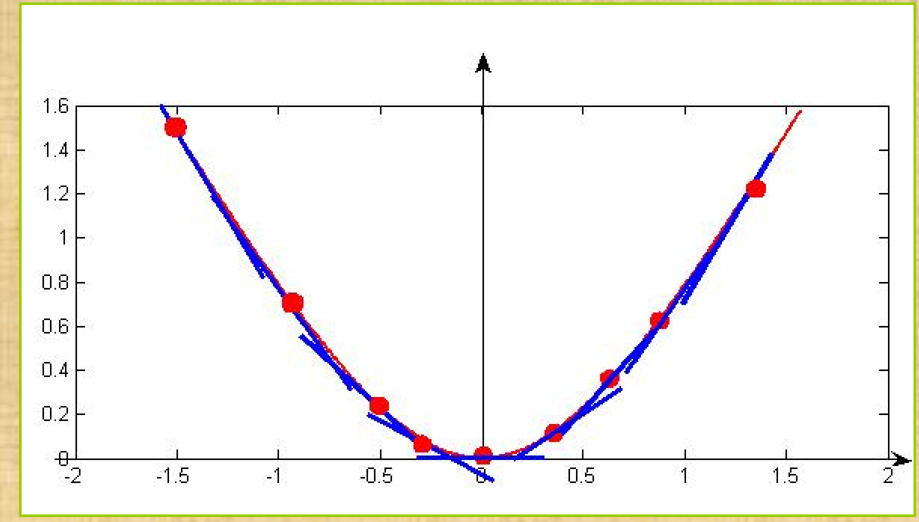
已知物体在$[0, T]$的运动轨迹为$s = f(t)$,

$$瞬时速度\ v\Big|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0}$$

$$= S'(t_0).$$

已知曲线求切线、已知位移求速度引入了导数.

已知曲线的切线如何求曲线、已知运动速度如何求路程?



由导数(或微分)求原来函数的运算是一种逆向思维过程.

定义 设函数$F(x)$与$f(x)$在区间I上有定义.

若在I上

$$F'(x)=f(x),$$

则称函数$F(x)$为$f(x)$在区间I上的一个原函数.

思考

函数$f(x)$为$F(x)$的导函数.

例如 1. $\because (x^3)' = 3x^2$,

分段函数

$\therefore x^3$是$3x^2$在区间$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数.

2. $\because (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, $\therefore \ln|x|$是$\dfrac{1}{x}$的一个原函数.

事实上，$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, x > 0, \\ \ln(-x), x < 0, \end{cases}$

$x > 0$时，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$x < 0$时, $[\ln(-x)]' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$;

$\therefore (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

3. $\because \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = -\frac{1}{2}[-\sin 2x]\cdot 2 = \sin 2x,$

$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + 1\right)' = -\frac{1}{2}[-\sin 2x]\cdot 2 = \sin 2x,$

$\therefore -\frac{1}{2}\cos 2x$和$-\frac{1}{2}\cos 2x + 1$都是$\sin 2x$的原函数.

什么样的函数存在着原函数呢?

一个函数的原函数是不是只有一个呢?

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数 $F(x)$.

此定理也叫**原函数存在定理**.

这就是说, 连续函数一定有原函数.

初等函数在其有定义的区间上存在原函数.

例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是一个初等函数,而且

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1,$$

定义域

故函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数.

一个函数的原函数是不是只有一个呢？

以下的例子中C为任意常数

1. $(\sin x)' = \cos x$ ， $(\sin x + \boxed{C})' = \cos x$.

2. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ ， $(\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{x}$.

3. $(-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C)' = \sin 2x$.

由前例我们可得到以下结论

定理　设$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，则

(1) $F(x)+C$也是$f(x)$的原函数，其中C为任意常数；

(2) $f(x)$的任意两个原函数之间相差一个常数.

证　设$G(x)$也是$f(x)$一个原函数，

$$\because \quad [F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x)$$

$$=[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$$

导数为零的函数为常数函数

$$\therefore \quad F(x)-G(x)=C. \text{（}C\text{ 为任意常数）}$$

同一函数的原函数不仅不唯一，而且有无穷多个.

同一函数的原函数有无穷多个，

那么如何表示这种求原函数的运算？

即如何表示 $F(x)+C$ ？

不定积分

定义 $f(x)$在区间I上的全体原函数称为$f(x)$在I上的不定积分，记作$\int f(x)\mathrm{d}x$.

即 $$\boxed{\int}\ \boxed{f(x)\,\mathrm{d}x} = F(x) + \boxed{C}$$

积分号

被积表达式

被积函数

积分变量

积分常数

不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$是一个函数族$F(x)+C$.

不定积分的性质

1. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x).$

不定积分的导数等于被积函数.

2. $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，或$\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C.$

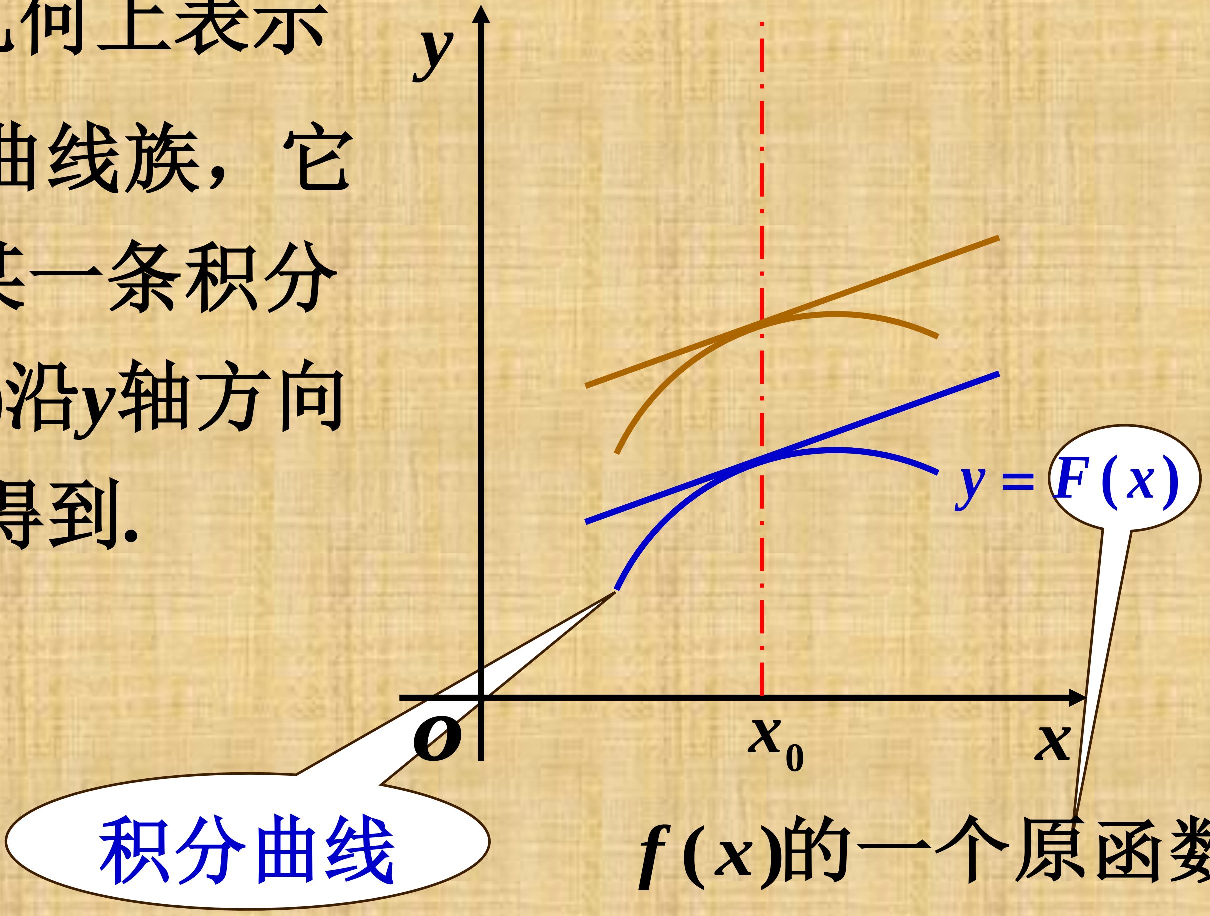
函数的导数（或微分）的不定积分等于该函数与任意常数之和.

微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

不定积分的几何意义

每条积分曲线在x_0点的切线相互平行.

函数$f(x)$的不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示$f(x)$的积分曲线族，它可由$f(x)$的某一条积分曲线$y=F(x)$沿y轴方向上下平移而得到.



不定积分 = 一个原函数+任意常数

例 求$\int x^5 \mathrm{d}x$.

解 $\because \left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, $\quad \therefore \int x^5 \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$.

例 求$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解 $\because (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$,

$$\therefore \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

已知切线如何求函数的曲线?

例1　设曲线通过点(0,0)，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的余弦值，求此曲线方程.

分析与提示：$f'(x)$　$f(x)$

由此我们想到求符合已知条件的原函数.

解　设曲线方程为　$y = f(x)$,

根据题意知　$f'(x) = \cos x$,

根据题意知 $f'(x)=\cos x,$

即$\cos x$是$f(x)$的一个原函数.

$\because \int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C,$

$\therefore\ f(0)=\sin 0+C=0$

由曲线通过点$(0,0)$ $\Rightarrow C=0,$

因此所求曲线方程为 $y=\sin x.$

二、基本公式

求微分与求不定积分是互逆的运算，由导数公式，可得：

熟记基本公式

$$1)\int 0\,\mathrm{d}x = C;$$

$$2)\int \mathrm{d}x = x + C;$$

$$3)\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, x > 0);$$

$$4)\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

熟记基本公式

$$5)\int e^x dx = e^x + C;$$

$$6)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$7)\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8)\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$9)\int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$10)\int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

熟记基本公式

$$11)\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C;$$

$$12)\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C;$$

$$13)\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$= -\arccos x + C;$$

$$14)\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$= -\operatorname{arccot} x + C.$$

三、不定积分的线性运算法则

定理 若函数$f(x)$和$g(x)$在区间I上的原函数都存在，则$f(x)\pm g(x)$在区间I上的原函数也存在，且

$$\int (f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

代数和的不定积分　　　　不定积分的代数和

该定理根据不定积分的定义可以证明.

定理 若函数$f(x)$在区间I上的原函数存在，k为实数$(k \neq 0)$,则函数$kf(x)$在区间I上的原函数也存在，且

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

即 $$\int \boxed{k} f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$$

被积函数中的非0常数可以提到积分符号外边.

有了基本公式和性质,我们可以解决一些不定积分的计算, 这样求不定积分的方法称为直接积分法.

例2 求$\int(2\cos x-e^x+x-3)dx.$

分析与提示：

用不定积分的基本公式和性质进行计算.

解 原式$=\int \boxed{2}\cos x dx-\int e^x dx+\int x dx-\int \boxed{3}\, dx$

$$=\quad \int\cos x dx-\int e^x dx+\int x dx-\quad\int dx$$

$$=\ 2\sin x-e^x+\frac{1}{2}x^2-3x+C.$$

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

例3 求$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 原式$= \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \int 1\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= x - \arctan x + C.$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$