第三节

局部改变量的估值问题——

微分及其运算

主要内容：

一、微分

二、微分公式和法则

三、微分在近似计算中的应用

一、微分

1. 微分概念

实例:正方形铁皮受热后面积的改变量

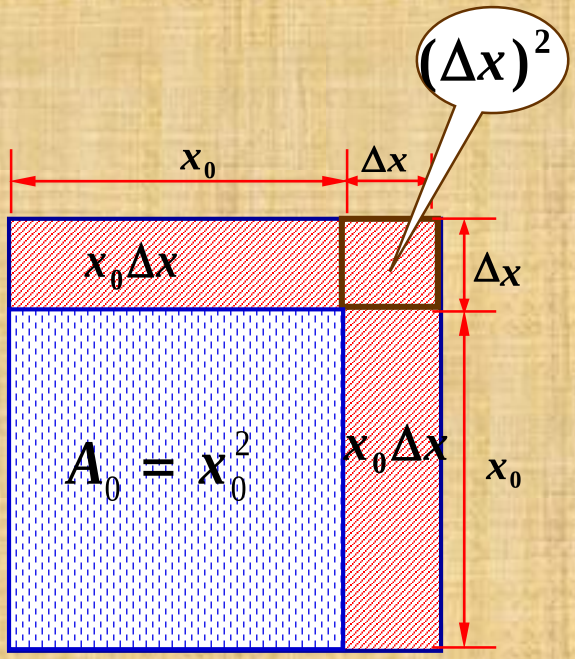
设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

面积函数 $A(x)=x^2$

$$\therefore\ \Delta A = A(x_0+\Delta x)-A(x_0)$$

$$=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



$$\Delta A = \underline{\underline{2x_0 \cdot \Delta x}}_{(1)} + \underline{\underline{(\Delta x)^2}}_{(2)}.$$

$2x_0 \cdot \Delta x$

(1) Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分,称为线性主部;

$(\Delta x)^2$

(2) Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

因为$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$,

所以 $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$.

即Δx的高阶无穷小

定义　设函数 $y=f(x)$在点x处有增量Δx,如果y的增量Δy可写为

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$$

其中　是与　　无关的常数, $A\cdot\Delta x$为Δy的线性主部,　　是Δx的高阶无穷小,

则称函数 $y=f(x)$在点 x 可微, 并称$A\cdot\Delta x$为 $y=f(x)$在点 x 处的微分,记作$\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}f(x)$.

即　$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x.$

于是有$\Delta y=$　　+

$\mathrm{d}y = A\Delta x$

$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x)$

关于定义的几点说明：

(1) $\mathrm{d}y$是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶的无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时，$\mathrm{d}y$与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \frac{A \cdot \Delta x + o(x)}{A \cdot \Delta x} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

$$\therefore \text{当} \Delta x \to 0 \text{时}, \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} \to 1.$$

（4）当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (线性主部).

因为
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

所以当$\Delta x \to 0$时，对上式两端取极限得

$$\boxed{f'(x)} \xleftarrow{?} \underline{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = A.$$

也就是说 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x.$

下面我们来求$y = x$的微分

$$\underbrace{\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = f'(x)\Delta x = x'\Delta x = \Delta x}$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\Delta x \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

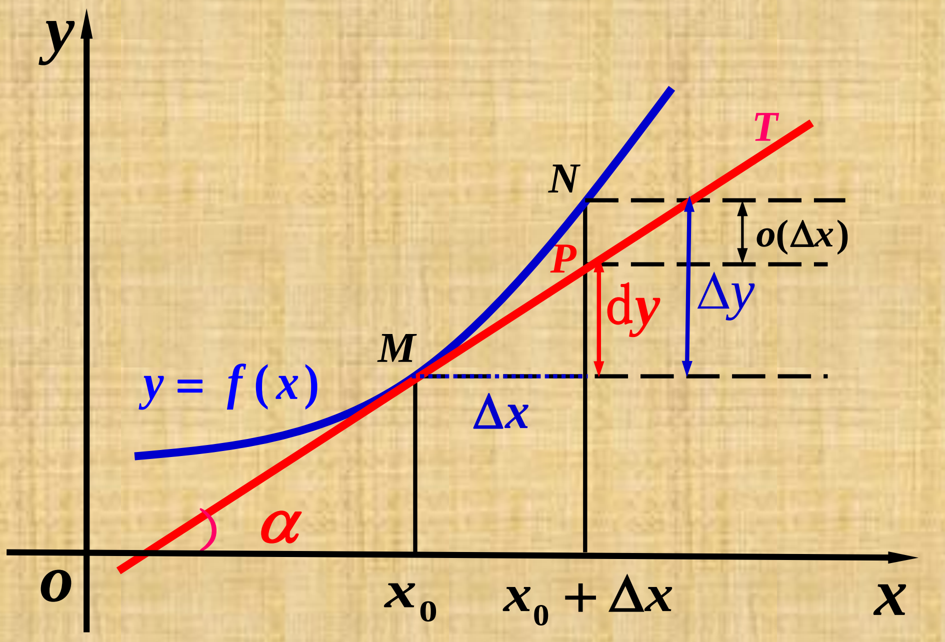
- 函数的微分$\mathrm{d}y$与自变量的微分$\mathrm{d}x$的商等于该函数的导数.

- 函数的可导与可微是等价的.

2. 微分的几何意义

几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时，$\mathrm{d}y$就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近,切线段MP可近似代替曲线段MN.

二、微分公式和法则

由微分定义可知，只要求出$y' = f'(x)$，再乘上自变量的微分$\mathrm{d}x$，即得函数$y = f(x)$的微分$\mathrm{d}y$.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

函数的导数

自变量的微分

例1 $\mathrm{d}(\ln x) = (\qquad)'\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x.$

$\mathrm{d}(\sin x)$

$\sin x \quad = (\qquad)'\mathrm{d}x = \cos x\mathrm{d}x.$

$\mathrm{d}C = (C)'\mathrm{d}x = 0.$

1. 基本初等函数的微分公式

$$\mathrm{d}(C)=0;$$

$$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2};$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{-\mathrm{d}v}{v^2};$$

$$y = f[u(x)]$$

$$\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u;$$

$$\mathrm{d}y[u(x)] = y'_u \cdot u'_x \mathrm{d}x.$$

三、微分在近似计算中的应用

因为 $\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

因此，如果$f(x_0)$和$f'(x_0)$都容易计算，那么就可以利用上式来近似计算$f(x_0+\Delta x)$.

例3 求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

提示与分析:该题是求函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$在点1.02处的值,$1.02=1+0.02$,而0.02是较小的量,看作Δx,所以原问题是求$f(x)=\sqrt[3]{x}$在$1+0.02$处的近似值问题.

例3 求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设$f(x)=\sqrt[3]{x}$,取$x_0=1,\Delta x=0.02,$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$\sqrt[3]{1.02}=f(1+0.02)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$=f(1)+f'(1)\times 0.02.$$

而 $$f(1)=\sqrt[3]{1}=1,$$

$$f'(1)=(\sqrt[3]{x})'\Big|_{x=1}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big|_{x=1}=\frac{1}{3},$$

于是 $$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{0.02}{3}\approx 1.0067.$$

课后作业

习题 3 (pages 98-100)

1(4)， 4(1)(6)，5(2)(3)，

11(4)，13(1)